解析力学の基礎

井上 翔太
(北里大学 理学部 化学科)

2022 年 2 月 9 日

1　イントロダクション: 解析力学とは

2 次元直交座標系 (x-y 座標系) におけるニュートンの運動方程式[*1]:

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \end{cases} \tag{1}$$

を、極座標系 (r, θ) に変換することを考えよう。過程は省略するが、変換後の式は次のように書ける。

$$\begin{cases} F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \end{cases} \tag{2}$$

直交座標系での式 (1) と見比べると、(2) は式形が明らかに乱れていることが分かるだろう。このように、**ニュートン力学は座標系の選択が系の取扱いに大きく影響する。**

では、**座標系の選択に依らない、より「一般的」な意味での運動方程式をつくることは出来ないだろうか？**
このようなモチベーションのもとに創始された[*2]、数学的に定式化された力学体系を**解析力学**という。

本書では、解析力学での運動方程式である**ラグランジュ方程式**:

ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{3}$$

および、(3) と等価な方程式である**正準方程式**:

正準方程式

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \tag{4}$$

の取り扱いを中心に、解析力学の基礎的な事項を俯瞰してゆくことを目的とする。

[*1] 物理学では、時間微分 $\frac{d}{dt}$ はしばしば従属変数の上にドットをのせて表される（**ニュートンの記法**)。
[*2] 当然ながら他のモチベーションもあるが、最もたる理由はこの「古典力学のさらなる一般化」にあるといっていいだろう。

目次

2　ラグランジュ形式

前章で見たように、ニュートン力学の運動方程式は座標系の選択によってその形を変える。この章では直交座標系をより「一般的な」座標系へと拡張し、種々の力学量を新たに定義することによって、座標系の選択の影響を受けない運動方程式である**ラグランジュ方程式** (3) を得て、ニュートン力学をラグランジュ形式として再考する。

2.1　一般化座標

2 次元直交座標系 (x, y) と極座標系 (r, θ) の間の変換を考えてみる。$(x, y) \to (r, \theta)$ の変換式は

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = r\cos\theta \\ y = y(r, \theta) = r\sin\theta \end{cases} \tag{5}$$

であり、逆変換 $(r, \theta) \to (x, y)$ の変換式は

$$\begin{cases} r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \theta(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{6}$$

となる。このような、座標系の取り替えを規定する式を「より一般的な」座標系に対して考える。

自由度 f [*3]の系における座標変数の数が f 個であると仮定する[*4]とき、直交座標系を $(x_1, x_2, \cdots, x_f) = (\{x_j\})$ と表し、より一般の座標系を $(q_1, q_2, \cdots, q_f) = (\{q_i\})$ と表すことにする[*5]。時間 t も引数に含めると、座標変換 $(\{x_j\}) \to (\{q_i\})$ は

$$x_j = x_j(\{q_i\}, t) = x_j(q_1, q_2, \cdots, q_f, t) \tag{7}$$

と表され、逆変換 $(\{q_i\}) \to (\{x_j\})$ は

$$q_i = q_i(\{x_j\}, t) = q_i(x_1, x_2, \cdots, x_f, t) \tag{8}$$

と表される。こうして表された、広義の意味での座標変数 q_i を**一般化座標**という。（ただし便宜上、以下の文脈では $\{x_j\}$ を x、$\{q_i\}$ を q としばしば表示する。）

一般化座標

$$x_j = x_j(\{q_i\}, t) = x_j(q, t) \tag{9}$$

$$q_i = q_i(\{x_j\}, t) = q_i(x, t) \tag{10}$$

---

*3 **自由度**とは、系の運動状態を規定するために必要な座標変数の数のことである。n-次元、N-質点系における座標変数の数は nN であるが、自由度 f はここから**拘束条件**の数 m を除いた値として定義される（$f \equiv nN - m$）。

*4 これを**ホロノーム**な系という。

*5 各質点の位置をベクトルで表して $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N)$ や $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_N)$ としてもよい。この場合、自由度 f に含まれる情報である系の次元 n をベクトルに内包した形になる。

2.2 一般化速度・一般化運動量

2.2.1 一般化速度

一般化座標 q_i の時間微分として、**一般化速度** $\dot{q}_i$ を考える。(10) に対し偏微分の連鎖律を用いると、

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \tag{11}$$

となるから、$\dot{q}_i$ は x,$\dot{x}$,t を引数に含むとわかる。したがって変換式:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\{x_j\}, \{\dot{x}_j\}, t) = \dot{q}_i(x, \dot{x}, t) \tag{12}$$

を得る。逆変換も同様にして、

$$\dot{x}_j = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} \tag{13}$$

であるから

$$\dot{x}_j = \dot{x}_j(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \dot{x}_j(q, \dot{q}, t) \tag{14}$$

となることがわかる。

一般化速度

$$\dot{x}_j = \dot{x}_j(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \dot{x}_j(q, \dot{q}, t)$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\{x_j\}, \{\dot{x}_j\}, t) = \dot{q}_i(x, \dot{x}, t)$$

2.2.2 一般化運動量

一般化運動量は、直交座標系の運動量 $p_{j,x}$ をもとにして定義される。直交座標系における運動エネルギー $T = T(\dot{x})$ は、

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 \tag{15}$$

とかける[*6]から、

$$p_{j,x} = m_j \dot{x}_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \tag{16}$$

となる[*7]。よって一般化運動量 p_i は、(14) によって $T(\dot{x}) = T(q, \dot{q}, t)$ であることに注意して

[*6] 一見 $m_j \dot{x}_j^2$ に対して縮約規約が適用できるように見えるが、$m_j \dot{x}_j \dot{x}_j$ とかけば添字 j が 3 つ連続していることになるため、適用できないことに注意。

[*7] 偏微分によって j 番目の項のみが抽出されているため、$\sum$ がないことに注意。

一般化運動量（運動エネルギーによる定義）

$$p_i \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \tag{17}$$

として定義するのが適当といえる。

一方、直交座標系でのポテンシャルエネルギー $V(x)$ は、(9) によって $V(q,t)$ となる。ここで**ラグランジアン**と呼ばれる関数 L を次のように定義する:

ラグランジアン

$$L(q,\dot{q},t) \equiv T(q,\dot{q},t) - V(q,t) \tag{18}$$

ポテンシャルエネルギー $V(q,t)$ の引数から、明らかに

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{19}$$

であるから、一般化運動量はラグランジアン L を用いて

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - 0 = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{20}$$

と表せる。

一般化運動量（ラグランジアンによる定義）

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{21}$$

(17) を用いて、p_i と $p_{j,x}$ の対応関係を導くこともできる。

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \\ &= p_{j,x}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \\ &= p_{j,x}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right) \\ &= p_{j,x}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{22}$$

2.3 一般化力

直交座標系での力を F_j とおくとき、系の（微小な）仕事 dW は

$$dW = F_j dx_j = F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} dq_i \tag{23}$$

と表すことができる。ここから、**一般化力** Q_i を次のように定義する。

一般化力

$$Q_i \equiv F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{24}$$

このようにすれば、一般化座標を用いた仕事の表示は

$$dW = Q_i dq_i \tag{25}$$

となって、直交座標でのそれとよく似た表式となる。また直交座標系においては、ポテンシャルエネルギーと力（保存力）の関係は

$$F_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{26}$$

として規定される。これと (24) から、一般化力とポテンシャルエネルギーとの関係として

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \tag{27}$$

が求まる（座標変換 $V(x) = V(q,t)$ を利用した）。これを定義とするのもよい。

一般化力（ポテンシャルエネルギーによる定義）

$$Q_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial q_i} \tag{28}$$

2.4 ラグランジュ方程式

一般化された力学量によって記述される運動方程式を導きたい。ニュートン力学において、力は運動量の時間微分で表されることを考えると、まずは $\dot{p}_i$ を求めるのが妥当と言えよう。

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i &= \frac{d}{dt}\left(p_{j,x}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) \\
&= \frac{dp_{j,x}}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + p_{j,x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \\
&= F_j\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + p_{j,x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \\
&= Q_i + p_{j,x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}
\end{aligned} \tag{29}$$

次に、運動エネルギーの一般化座標による偏微分を考える。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial q_i} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \\
&= p_{j,x}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right) \\
&= p_{j,x}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x_j}{\partial t} \\
&= p_{j,x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}
\end{aligned} \tag{30}
$$

これらから直ちに、

$$
\dot{p}_i = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \tag{31}
$$

を得る。一方 $\dot{p}_i = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ および (28) を代入して

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \tag{32}
$$

を得る。運動エネルギー T の代わりにラグランジアン $L = T - V$ を用いれば、ラグランジュ形式の基礎方程式である**ラグランジュ方程式**:

ラグランジュ方程式

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0
$$

を得る。

2.5 ラグランジュ方程式の共変性

前節で得たラグランジュ方程式 (3) の、座標変換によって式形が乱れない性質を確かめておくべきである。ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ に対して、新たな一般化座標への変換 $(\{q_i\}) \to (\{Q_j\})$ を施したとき、ラグランジュ方程式 (3) の各項について

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{33}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i} \tag{34}
$$

となるから、新たなラグランジュ方程式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i}\right)\\
&=\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}+\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}-\left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i}\right)\\
&=0
\end{aligned}
\tag{35}
$$

となる。ここで (22) において直交座標 x_j の代わりに Q_j をとって、第三辺と第五辺を比較すると

$$
\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \tag{36}
$$

を得る。また、

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}=\frac{dq_k}{dt}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \tag{37}
$$

$$
\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}\right)=\frac{dq_k}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}=\frac{dq_k}{dt}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \tag{38}
$$

であるから、

$$
\therefore \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i} \tag{39}
$$

がいえる。(36)(39) を (35) に代入して整理すると

$$
\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}-\frac{\partial L}{\partial Q_i}\right)=0 \tag{40}
$$

という表式を得る。ここで $\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\neq 0$ だから[*8]結局、

$$
\therefore \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}-\frac{\partial L}{\partial Q_i}=0 \tag{41}
$$

となって、変換前と式形は全く変わっていないことになる。

[*8] これは**ヤコビアン**であり、座標変換で次元が変化することはないから 0 にはならない。

3 変分原理

ラグランジュ方程式の導出はより解析学的な条件、すなわち関数の停留条件から行うこともできる。ある関数 $f(x)$ を、**仮想的に**微小変化させることを**変分**といい、これは $f(x)$ の 1 次までのテイラー展開（あるいは全微分）として近似できる[*9]:

変分

$$\delta f(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x)\delta x \simeq f(x+\delta x) - f(x) \tag{42}$$

この変分が停留値を取る（$\delta f = 0$）という条件は重要な定式化を与えることが多く、そのような場合をとくに**変分原理**という。この章では、変分原理が与える重要な力学原理について述べたうえで、ラグランジュ方程式を変分原理による定式化として導出する。

3.1 拘束条件と仮想仕事の原理

これまでの議論は自由度の数と一般座標の数が一致するという仮定（**ホロノーム**な系である）のもとに考えてきたが、このとき、系には**拘束条件**として m 個の条件式:

ホロノミックな拘束条件

$$f_k(q,t) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m) \tag{43}$$

が（大抵の場合）定まっている。以上の、座標変数（と時間）のみを引数に含む等式形拘束条件は" **ホロノミック**である" といい、不等式や不完全微分などを含み、以上の形に表されない拘束条件は" **非ホロノミック**である" という。また、これら拘束条件が系に与える力を**拘束力**という。

直交座標系を考える。N-質点系における j 番目の質点の位置を $\boldsymbol{x}_j$、質点にはたらく合力を $\boldsymbol{F}_j$ と定めるとき、**仮想仕事** δW の停留によって質点系の力のつり合いを考えることができ、これを**仮想仕事の原理**という。

仮想仕事の原理

各質点にはたらく力 $\boldsymbol{F}_j$ が任意の**仮想変位** $\delta \boldsymbol{x}_j$ に対して次を満たすとき、質点系はつり合う。

$$\delta W \equiv \boldsymbol{F}_j \cdot \delta \boldsymbol{x}_j = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{0} \tag{44}$$

仮想仕事の原理 (44) は、時間に陽に依存しない[*10]ホロノミックな拘束条件である**滑らかな拘束**のもとではさらに簡単化できる。

[*9] 当然ながら、変分 δ は多変数関数や汎関数に対しても定義される。

[*10] **時間に陽（あらわ）に依存する**とは、物理量が引数に「直接」時間 t を含むことをいう。

滑らかな拘束

時間を陽に含まないホロノミックな拘束条件:

$$f_k(q) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m) \tag{45}$$

で与えられる拘束力 $\boldsymbol{B}_j$ の仮想仕事は、

$$\boldsymbol{B}_j \cdot \delta \boldsymbol{x}_j = 0 \tag{46}$$

をみたす。

拘束条件 (45) を満たすような仮想変位 $\delta' \boldsymbol{x}_j$ に対しての仮想仕事 $\delta' W$ を考えると、まず系がつり合い状態にあるとき、仮想仕事の原理はいかなる仮想変位に対しても満たされるから

$$\delta' W = \boldsymbol{F}_j \cdot \delta' \boldsymbol{x}_j = 0 \tag{47}$$

ここで $\boldsymbol{F}_j$ を拘束力 $\boldsymbol{B}_j$ とそれ以外の力 $\boldsymbol{F}'_j$ に分けて仮想仕事を考えると、

$$\delta' W = (\boldsymbol{B}_j + \boldsymbol{F}'_j) \cdot \delta' \boldsymbol{x}_j = 0 \tag{48}$$

であるが、(46) から $\boldsymbol{B}_j \cdot \delta' \boldsymbol{x}_j = 0$、ゆえに

$$\delta' W = \boldsymbol{F}'_j \cdot \delta' \boldsymbol{x}_j = 0 \tag{49}$$

を得る。したがって、仮想仕事の原理 (44) は滑らかな拘束 (45) のもとで以下のように書き換えられる。

滑らかな拘束のもとにおける仮想仕事の原理

滑らかな拘束 (45) のもとにおいては、任意の拘束を破らない仮想変位 $\delta' \boldsymbol{x}_j$ と拘束力を除いた力 $\boldsymbol{F}'_j$ に対して仮想仕事の原理:

$$\delta' W = \boldsymbol{F}'_j \cdot \delta' \boldsymbol{x}_j = 0$$

が成り立つ。

すなわち、滑らかな拘束のもとであれば、系の力学的状態は拘束力を表に出さずに考えることができる。

3.2 ダランベールの原理

動力学的な系を考える。N-質点系の j 番目の質点におけるニュートンの運動方程式:

$$m_j \ddot{\boldsymbol{x}}_j = \boldsymbol{F}_j \tag{50}$$

の合力 $\boldsymbol{F}_j$ には多くの場合拘束力が含まれるが、滑らかな拘束 (45) のもとにおいてはこれを排除できる。すなわち、動力学的な系においても、拘束力を排除した形で仮想仕事の原理に相当する力学原理を考えることができる。これを**ダランベールの原理**といい、ニュートンの運動方程式の変分原理に相当する。

ダランベールの原理

質点の軌道 $\boldsymbol{x}_j$ は、滑らかな拘束のもとでは任意の時刻 t における拘束力を除いた力 $\boldsymbol{F}'_j$ および仮想変位 $\delta\boldsymbol{x}_j$ に対し、

$$(\boldsymbol{F}'_j - m_j\ddot{\boldsymbol{x}}_j)\cdot\delta\boldsymbol{x}_j = 0 \tag{51}$$

をみたす。

これは運動方程式の変分原理を考えることによって、動力学的な系を静力学的状態として扱うことができるという主張に他ならない。

3.3 汎関数の変分原理とオイラー・ラグランジュ方程式

関数は一般に数値と数値（定数のスカラーやベクトル）を対応させる写像であるが、関数の入力に対し数値を返すような写像、すなわち関数形によって定まる量を**汎関数**という。解析力学では特に、リーマン積分で定義される汎関数が用いられる。

汎関数

独立変数 x に対して定まる従属変数 $y = y(x)$ を入力にもつ次の積分 I:

$$I[y] \equiv \int_{x_i}^{x_f} f(x, y, y')dx \tag{52}$$

は汎関数である[a]。

[a] ここで I **の値は** y **の関数形のみに依存する**のであって、独立変数 x は積分操作によって消えてしまうため I の引数とはならないことに注意。

さて、汎関数 (52) の変分に対する停留条件:

$$\delta I = 0 \tag{53}$$

について考えてみる。I を δ だけ仮想変位させたとき、f も δ だけ仮想変位すると考えると

$$\delta I = \int_{x_i}^{x_f} \delta f(x, y, y')dx \tag{54}$$

となる[*11]。ここで δf は全微分[*12]によって

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \tag{55}$$

と計算できる。また $\delta y'$ について微分と変分の交換:

$$\delta y' = \delta\frac{dy}{dx} = \frac{d(y+\delta y)}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d(\delta y)}{dx} \tag{56}$$

[*11] $\delta I = \delta\left(\int_{x_i}^{x_f} f(x, y, y')dx\right)$ であるから、積分と変分の交換をとってもよいだろう。

[*12] (52) は x に依らないから、x の項 $\frac{\partial f}{\partial x}\delta x$ は必要ない。

が成り立つから、(55)(56) を (54) に代入して

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d(\delta y)}{dx} \right) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial f}{\partial y}\delta y dx + \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d(\delta y)}{dx} dx\end{aligned} \tag{57}$$

を得る。ここで境界条件を $\delta y(x_i) = \delta y(x_f) = 0$ と定める[*13]と、(57) 最右辺第 2 項について部分積分:

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d(\delta y)}{dx} dx &= \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y \right]_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \delta y \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} dx \\ &= -\int_{x_i}^{x_f} \delta y \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} dx \qquad (\because \delta y(x_i) = \delta y(x_f) = 0)\end{aligned} \tag{58}$$

が成り立つから、(57) に代入して

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial f}{\partial y}\delta y dx - \int_{x_i}^{x_f} \delta y \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} dx \\ &= \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \\ &= 0\end{aligned} \tag{59}$$

となる。δy は任意の仮想変位であるから、(59) で積分が 0 になるためには

$$\therefore \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{60}$$

が要請される。これを**オイラー・ラグランジュ方程式**といい、汎関数 (52) の変分原理として導かれる方程式[*14]である。

オイラー・ラグランジュ方程式

汎関数 (52) の変分原理 $\delta I[y] = 0$ について、次の命題が成り立つ。

$$\delta I[y] = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x, y, y') \text{ は } \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ をみたす}$$

3.4 最小作用の原理

オイラー・ラグランジュ方程式 (60) を見てみると、ラグランジュ方程式 (3) とまったく等価な方程式であることに気づく。ここから、**ラグランジュ方程式が汎関数の変分原理として導かれる**ことが示唆される。実際に汎関数を

$$S[q] \equiv \int_{t_i}^{t_f} L(t, q, \dot{q}) dt \tag{61}$$

[*13] y は積分区間 (x_i, x_f) において $y + \delta y$ となっていればよいわけだから、区間の端点において変位していなくても問題はない。
[*14] オイラー・ラグランジュ方程式 (51) を**汎関数微分**と称し、$\frac{\delta I}{\delta y}$ と表現することがしばしばある。

とラグランジアンの時間積分として定めれば、これは (52) とまったく等価な汎関数になる。この汎関数 S をとくに**作用（作用積分）**といい、解析力学において非常に重要な役割を果たす。

作用とラグランジュ方程式

作用 (61) の変分原理 $\delta S[q]=0$ について、次の命題が成り立つ。

$$\delta S[q]=0 \;\Leftrightarrow\; L(t,q,\dot{q}) \text{ は } \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \text{ をみたす}$$

さて、ラグランジュ方程式は運動方程式であるから、当然ながら系の運動はラグランジュ方程式をみたす形で実現する。これは言い換えれば、**系の運動は作用を停留値にするような軌道で実現する**、ということに他ならない。これを**最小作用の原理**[*15]という。

最小作用の原理

系の運動は、作用を停留値にするような軌道のものが実現する。

3.5　拘束のある系

ホロノミックな拘束条件 (43) が課されているとき、系はどのように解析できるかを考える。数学的には、拘束条件[*16]がある停留化問題の解析について**ラグランジュの未定乗数法**と呼ばれる方法を使えることが知られている。

ラグランジュの未定乗数法

関数 $f(\{x_i\})$ が m 個の拘束条件 $g_k(\{x_i\})=0\;\;(k=1,2,\cdots,m)$ のもとで停留するとき、ある**未定乗数**（定数）λ_k を導入することによって得られる関数 $\tilde{f}(\{x_i\},\{\lambda_k\})$:

$$\tilde{f}(\{x_i\},\{\lambda_k\})\equiv f(\{x_i\})-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k g_k(\{x_i\}) \tag{62}$$

は、停留化条件

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}=\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda_k}=0 \tag{63}$$

をみたして停留する。

これは即ち、f の" 条件 g_k のもとでの" 停留化問題を、$\tilde{f}$ の" 条件なしの" 停留化問題にすり替えて考えることができると述べていることになる。

このことから、ラグランジアン $L(q,\dot{q},t)$ が m 個のホロノミックな拘束条件 (43) のもとで停留化するとき、未定乗数を λ_k（引数では λ とかく）とすれば、新たなラグランジアン $\tilde{L}(q,\dot{q},\lambda,t)$:

[*15] " 最小" 作用の原理であるが、実際には最小の軌道であるとは限らない（停留値をとる点が鞍点である可能性がある）。ハミルトンの原理ともいう。

[*16] ここでいう拘束条件とは一般に、" 等価な独立変数のみを引数に持つ関数の、等式形の拘束条件" であり、ホロノミックな拘束条件を指す。

$$\tilde{L}(q,\dot{q},\lambda,t) \equiv L(q,\dot{q},t) - \lambda_k f_k(q,t) \tag{64}$$

は停留化するはずである。$\tilde{L}$ を用いた場合のラグランジュ方程式:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = 0 \tag{65}$$

をもとのラグランジアン L で表すと、拘束条件 f_k および未定乗数 λ_k が $\dot{q}_i$ に依らないことから

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \tag{66}$$

を得る。ここで、作用の変分 δS は (59) によって

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt \tag{67}$$

となる。(66) の左辺はもとのラグランジュ方程式そのものであるから、右辺を (67) に代入して

$$\delta S = -\lambda_k \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \delta q_i dt \tag{68}$$

を得る。ここでホロノミックな束縛条件 (43) の変分を考えると、

$$\delta f_k = \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\delta q_i = 0 \quad (\because f_k = 0) \tag{69}$$

である[*17]から、(68) に代入すると

$$\therefore \delta S = 0$$

を得る。いま、もとのラグランジアン L は（拘束条件のもとで）停留化しているため $\delta S = 0$ をみたすはずであるから、(66) は結局ホロノミックな拘束条件 (43) のもとでの系の運動状態を与えることになる。

ホロノミックな拘束条件のもとでのラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}$$

未定乗数 λ_k はどんな物理的意味をもつか考えてみる。(69) に λ_k をかけると

$$\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\delta q_i = 0 \tag{70}$$

という表式を得る。ここでホロノミックな拘束条件 (43) に対応する（一般化力としての）拘束力を B_i とおくと、(46) より

$$B_i \delta q_i = 0 \tag{71}$$

[*17] (55) 同様に、作用が t に依存しないため t の項 $\frac{\partial f_k}{\partial t}\delta t$ は必要ない。

が要請される。(70)(71) を比較すれば、

未定乗数と拘束力

$$B_i = \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \tag{72}$$

を得る。ゆえに、未定乗数は拘束力を与える[*18]。

[*18] (66) は非保存力（ポテンシャルエネルギーで表せない力）を含んだラグランジュ方程式と見ることができ、ここから拘束力に相当するという見当がつく。

4 対称性と保存則

系のラグランジアン L にある操作 X を施しても不変[*19]であるとき、L は操作 X について**対称**であるという。この章では、ニュートン力学における三つの保存則をラグランジュ形式で再び定式化し、保存則をラグランジアンの対称性から一般論として与える**ネーターの定理**について述べる。

4.1 ラグランジアンの任意性

ラグランジアン $L(q,\dot{q},t)$ に対して、任意関数 $W=W(q,t)$ を用いて

$$L \to L+\dot{W} \tag{73}$$

という変換を施したとき、系のラグランジュ方程式はどのように変化するかを考える。新たなラグランジアン $L+\dot{W}$ による作用を $\tilde{S}$ とおくと、その変分は

$$\begin{aligned}\delta\tilde{S} &= \int_{t_i}^{t_f} \delta(L+\dot{W})dt \\ &= \delta S + [\delta W]_{t_i}^{t_f} \\ &= \delta S + \left[\frac{\partial W}{\partial q_i}\delta q_i\right]_{t_i}^{t_f}\end{aligned} \tag{74}$$

と計算できる。ここで $\delta q_i(t_i)=\delta q_i(t_f)=0$ であることから

$$\therefore \delta\tilde{S}=\delta S \tag{75}$$

となるから、(75) が停留するとき L と $L+\dot{W}$ は同じラグランジュ方程式をみたす。このことを" ラグランジアンには任意性がある" と表現する。

ラグランジアンの任意性

ラグランジアン $L(q,\dot{q},t)$ に対して任意関数の時間微分 $\dot{W}(q,t)$ を加えても、ラグランジュ方程式は不変。

4.2 運動量保存則

ラグランジュ方程式 (3) において、k 番目の座標 q_k のみがラグランジアン L に陽に含まれなかったとする。このとき、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{dp_k}{dt} = 0 \tag{76}$$

であるから、q_k に共役な運動量 p_k が保存したことがわかる。このような、ラグランジアンに陽に含まれない座標を**循環座標**という。

[*19] " ラグランジアン L が不変である" というのは L の関数形についてであって、値のことではない（L 自体が保存量になるわけではない）。

循環座標による運動量の保存

ラグランジアン L がある座標 q_k を陽に含まないとき、共役な運動量 q_k は保存する。

では、系のある座標 q_k を δq_k だけずらす（速度は不変とする）操作:

$$\begin{aligned} q_k &\to q_k + \delta q_k \\ \dot{q}_k &\to \dot{q}_k \end{aligned} \tag{77}$$

を施しても、ラグランジアン L が不変であったとする。このとき**空間並進対称性**があるという。さて、q_k が循環座標であると仮定するとき、操作 (77) を施しても L は不変であり運動量保存則を与える。ゆえにある座標の空間並進対称性を仮定することで、運動量保存則が与えられることが予想できる。

(77) において $\delta\dot{q}_k = 0$ であり、また L が不変であるから $\delta L = 0$ である。したがって

$$\delta L(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k = 0 \tag{78}$$

である[*20]。δq_k は任意の仮想変位であるから結局、

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{dp_k}{dt} = 0 \tag{79}$$

となって、運動量保存則を得る。

運動量保存則

系に空間並進対称性があるとき、運動量保存則が成り立つ。

4.3 角運動量保存則

ある座標がどのような回転角をとってもラグランジアン L が不変であるとき、**空間回転対称性**があるという。

N-質点系を考える。i 番目の質点の座標を $\boldsymbol{r}_i$ とし、全ての質点が回転角 $\boldsymbol{\phi}$ を持っているとする。このとき、回転角を $\delta\boldsymbol{\phi}$ だけずらすと、質点の位置と速度は

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{r}_i &= \delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r}_i \\ \delta\dot{\boldsymbol{r}}_i &= \delta\boldsymbol{\phi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i \end{aligned} \tag{80}$$

だけ変化する[*21]。ラグランジアン $L(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i)$ について $\delta L = 0$ であるから

$$\delta L(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{81}$$

となる。(81) に (80) を代入すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot(\delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r}_i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\cdot(\delta\boldsymbol{\phi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) = 0 \tag{82}$$

[*20] 時間 t は関係がないため、L の引数から除いている。

[*21] $\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$ の計算は、ベクトル値関数の外積に対する積の微分則（$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$）を用いる。$\delta\boldsymbol{\phi}$ は t に依らない。

となる。一般化運動量の定義 (21) およびラグランジュ方程式から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_i &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \\ \dot{\boldsymbol{p}}_i &\equiv \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} \end{aligned} \tag{83}$$

と表して (82) に代入すると、

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r}_i) + \boldsymbol{p}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) = 0 \tag{84}$$

となる。(84) は $\delta\boldsymbol{\phi}$ で括って

$$\delta\boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i) = 0 \tag{85}$$

とできて[*22]、さらに (85) を外積における積の微分則によってまとめると

$$\delta\boldsymbol{\phi} \cdot \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i) = 0 \tag{86}$$

を得る。$\delta\boldsymbol{\phi}$ は任意の仮想変位であるから結局、

$$\therefore \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i) = 0 \tag{87}$$

である。すなわち角運動量が保存したことになる。

角運動量保存則

系に空間回転対称性があるとき、角運動量保存則が成り立つ。

4.4 力学的エネルギー保存則

運動量保存則は空間並進対称性から得られたが、同様の議論として**時間並進対称性**:

$$t \to t + \delta t \tag{88}$$

を考えてみる。このとき、ラグランジアン L は時間を陽に含まず $L(q, \dot{q})$ となる。この時間微分を考えると

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \tag{89}$$

を得る。一般化運動量の定義 (21) およびラグランジュ方程式から

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{90}$$

[*22] スカラー三重積の順序変更（$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$）を用いる。

と表して (89) に代入すると、

$$\frac{dL}{dt} = \dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i \tag{91}$$

となる。(91) 右辺に積の微分則を用いると、

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(p_i \dot{q}_i) \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dt}(p_i \dot{q}_i - L) = 0 \tag{92}$$

を得る。ここで新たな関数 H を

$$H(q,p) \equiv p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q}) \tag{93}$$

と定めれば、(92) から H は保存量となる。このような関数 H を（時間を陽に含まない）**ハミルトニアン**という。

H がどのような物理的意味を持つか考える。(92) の $p_i \dot{q}_i$ を直交座標系に変換すると、

$$H(x,p_x) = p_{j,x} \dot{x}_j - L(x,\dot{x}) \tag{94}$$

となる。(15)(16)(18) を用いて書き換えると

$$\begin{aligned} H &= \sum_j m_j \dot{x}_j^2 - L \\ &= 2T - (T - V) \\ &= T + V \end{aligned} \tag{95}$$

となって、これは全力学的エネルギーを表す[*23]。

時間を陽に含まないハミルトニアン

(93) で定義される時間を陽に含まないハミルトニアン H は

$$H(q,p) = T + V$$

となって、全力学的エネルギーを表す。

以上のことから、次のことが言える。

力学的エネルギー保存則

系に時間並進対称性があるとき、力学的エネルギー保存則が成り立つ。

4.5 ネーターの定理

以上の三つの保存則を、より一般的な表式にまとめることを考える。

[*23] 直交座標系で示したが、座標系の選択によってエネルギーが変化することはないためにこれは一般的な議論として成り立つ。

4.5.1　座標変換について対称なとき

座標 q_i を微小にずらしたとき、速度 $\dot{q}_i$ も変換を受けたとする。

$$\begin{aligned} q_i &\to q_i + \delta q_i \\ \dot{q}_i &\to \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i \end{aligned} \tag{96}$$

となる。このときラグランジアン L が $\delta L = 0$ であったと仮定すると、

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = 0 \tag{97}$$

を得る。一般化運動量の定義 (21) およびラグランジュ方程式から

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned}$$

と表して (97) に代入すると、

$$\dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i = 0 \tag{98}$$

となる。左辺に積の微分則を使ってまとめれば、

$$\therefore \frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) = 0 \tag{99}$$

を得て、$p_i \delta q_i$ は保存量となる。すなわち、微小な座標変換に対してラグランジアンが不変であれば、保存量が導かれる。この主張を**ネーターの定理**という。

ラグランジアンの任意性を踏まえて、以上の主張をさらに拡張する。新たなラグランジアンを任意関数 $W(q,t)$ を用いて $L \to L + \dot{W}$ とするとき、$\delta L = \dot{W}$ であるから (98) より、

$$\delta L = \dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i = \dot{W} \tag{100}$$

右辺が 0 になるように変形すれば、

$$\therefore \frac{d}{dt}(p_i \delta q_i - W) = 0 \tag{101}$$

を得て、この場合 $p_i \delta q_i - W$ が保存量となる。まとめると以下のようになる。

ネーターの定理

ラグランジアン $L + \dot{W}$（$W = W(q,t)$ は任意関数）が微小な座標変換について対称であるとき、

$$p_i \delta q_i - W$$

が保存量となる。

4.5.2 座標と時間の変換について対称なとき

(96) に加えて時間並進対称性 $t \to \tilde{t} = t + \delta t$ を仮定したときのネーターの定理はどのようになるだろうか。このとき、変換前の作用 S_i および変換後の作用 S_f は次のように書ける:

$$
\begin{aligned}
S_i &= \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t)dt \\
S_f &= \int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_f} L(q + \delta q, q' + \delta q', \tilde{t})d\tilde{t}
\end{aligned}
\tag{102}
$$

ただし $\tilde{t}_i = t_i + \delta t,\ \tilde{t}_f = t_f + \delta t$ とし、$\tilde{t}$ による微分はドットの代わりにプライムで表した（$(q' + \delta q')$[*24]。このときの変分 $\delta S = S_f - S_i$ を計算したい。S_f の積分範囲を S_i と統一するために、以下の置換[*25]を行う。

$$
\tilde{t} = t + \delta t \ \Rightarrow\ d\tilde{t} = (1 + \dot{\delta t})dt \tag{103}
$$

よって δS は

$$
\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ (1 + \dot{\delta t}) L(q + \delta q, q' + \delta q', \tilde{t}) - L(q, \dot{q}, t) \right\} dt \tag{104}
$$

となる。$q' + \delta q'$ に関しても t を用いて表したい。変換式 (103) を用いると、微分演算子の関係式として

$$
\frac{d}{d\tilde{t}} = \frac{1}{1 + \dot{\delta t}} \frac{d}{dt} = (1 - \dot{\delta t}) \frac{d}{dt} \tag{105}
$$

を得るから、これを用いて

$$
q_i' + \delta q_i' = (1 - \dot{\delta t})(\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) \simeq \dot{q}_i + \epsilon_i \tag{106}
$$

$$
(\epsilon_i \equiv \delta \dot{q}_i - \dot{q}_i \dot{\delta t}) \tag{107}
$$

を得る[*26]。(106) を用いて $L(q + \delta q, q' + \delta q', \tilde{t}) = L(q + \delta q, \dot{q} + \epsilon, \tilde{t})$ の一次までのテイラー展開を考えると、

$$
L(q + \delta q, \dot{q} + \epsilon, \tilde{t}) \simeq L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \tag{108}
$$

であるから、(103) に代入して（$L(q, \dot{q}, t) = L$ とする）、

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} \left\{ (1 + \dot{\delta t}) \left(L + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right) - L \right\} dt \\
&\simeq \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + L \dot{\delta t} \right) dt
\end{aligned}
\tag{109}
$$

を得る[*27]。(107) で ϵ_i を戻して整理すると

[*24] 変換後の系の速度は $\tilde{t}$ によってスケーリングされていなければならない。

[*25] ここで δt は時間の関数である（$\delta t = \delta t(t)$）から、t で微分できる。

[*26] 二次以上の微小量は無視した。

[*27] 二次以上の微小量は無視した。

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) \dot{\delta t} + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \right\} dt \tag{110}$$

となる。さらに第二項、第三項を部分積分[*28]すると

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right) dt - \int_{t_i}^{t_f} \delta q_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dt \tag{111}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) \dot{\delta t} dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left\{ \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) \delta t \right\} dt - \int_{t_i}^{t_f} \delta t \frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) dt \tag{112}$$

となるから、これらを (110) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \delta S = &\int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \int_{t_i}^{t_f} \delta t \left\{ \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) \right\} dt \\ &+ \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) \delta t \right\} dt \end{aligned} \tag{113}$$

を得る。(113) のうち、第一項の積分は系がラグランジュ方程式をみたしていることから自明に 0 である。第二項の積分についても、ラグランジュ方程式を用いて被積分関数を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) &= \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{dL}{dt} + \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \\ &= -\frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= -\frac{dL}{dt} + \frac{dL}{dt} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{114}$$

となる[*29]から、(113) は結局第三項の積分のみが残って

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) \delta t \right\} dt \tag{115}$$

となるが、ラグランジアンが不変であるという仮定から $\delta S = 0$ が要請される。よって

$$\therefore \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) \delta t \right\} dt = 0 \tag{116}$$

となって、被積分関数である

$$\begin{aligned} N &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) \delta t \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i - \left(p_i \dot{q}_i - L \right) \delta t \\ &= p_i \delta q_i - H \delta t \end{aligned} \tag{117}$$

[*28] 部分積分は一般に原始関数への代入操作を伴うが、今回は $\int_{t_i}^{t_f}$ を残すために積分のままにする。(58) のように部分積分の第一項が落ちることはない。

[*29] 二行目の変形で $L(q, \dot{q}, t)$ の時間微分（(89) に t の項を追加）を用いている。

は保存量になる[*30]。この N を**ネーター・チャージ**という。ラグランジアンに任意性（$+\dot{W}$）を加味した場合のネーター・チャージは、(115) で $\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \dot{W} dt$ とすることで

$$N \equiv p_i \delta q_i - H\delta t - W \tag{118}$$

となる。まとめると以下のようになる。

一般化されたネーターの定理

ラグランジアン $L + \dot{W}$（$W = W(q,t)$ は任意関数）が座標と時間の微小変換について対称であるとき、ネーター・チャージ N:

$$N \equiv p_i \delta q_i - H\delta t - W$$

が保存量となる。

[*30] 最後の変形でハミルトニアンの定義を用いたが、これは時間を陽に含むハミルトニアンである（次章参照）。

5　ハミルトン形式

前章まで、基本量としてラグランジアン $L(q,\dot{q},t)$ を扱ってきたが、代わりに**ハミルトニアン**を用いてもまったく等価な議論が可能である。まずは、前章で用いてきたハミルトニアンの定義を、時間を陽に含む形で以下のように再定義する[*31]:

ハミルトニアン

$$H(q,p,t) \equiv p_i\dot{q}_i - L(q,\dot{q},t) \tag{119}$$

H が q,p,t を陽に含むことは、(119) の全微分から容易に分かる。

$$\begin{aligned} dH &= d(p_i\dot{q}_i) - dL \\ &= \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \left(\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}dt\right) \\ &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t}dt \end{aligned} \tag{120}$$

この章では、前章までで用いてきたラグランジュ方程式 (3) を、ハミルトニアンを用いた表式である**正準方程式** (4) に置き換え、座標 q と運動量 p が対等な立場の力学変数であるとして展開されるハミルトン形式について述べる。

5.1　正準方程式

5.1.1　全微分を利用して導出する

ハミルトニアン $H(q,p,t)$ の引数を見て全微分すると、以下のようになる。

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt \tag{121}$$

これを (120) と比較してやれば、次の連立方程式を得る。

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dfrac{\partial L}{\partial t} = -\dfrac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \tag{122}$$

このうち、上の 2 つの方程式をまとめて**正準方程式**といい、ハミルトン形式の基礎方程式となる。2 つを比較してみると、座標 q_i と運動量 p_i が入れ替わったような構造をしている。このことから、力学変数の組 (q,p) を**正準（共役な）変数**という。

[*31] 数学的には、ハミルトニアンとラグランジアンは**ルジャンドル変換**を介した関係にある。

正準方程式

$$
\begin{cases}
\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\
\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}
\end{cases}
$$

5.1.2 変分原理から導出する

正準方程式はラグランジュ方程式とまったく等価な方程式であるため、作用 (61) の変分原理 $\delta S = 0$ としても導くことができる。(61) に (119) を用いると、

$$S = \int_{t_i}^{t_f} (p_i \dot{q}_i - H)\, dt \tag{123}$$

となる。この変分が 0 になるという条件から、

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \{\delta(p_i \dot{q}_i) - \delta H\}\, dt = 0 \tag{124}$$

を得る。ここで

$$\delta(p_i \dot{q}_i) = \dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i = \dot{q}_i \delta p_i + p_i \frac{d(\delta q_i)}{dt} \tag{125}$$

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \tag{126}$$

である[*32]から、これらを (124) に代入して整理すると

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i dt + \int_{t_i}^{t_f} p_i \frac{d(\delta q_i)}{dt} dt - \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i dt = 0 \tag{127}$$

となる。ここで (127) 第二項を部分積分して

$$
\begin{aligned}
\int_{t_i}^{t_f} p_i \frac{d(\delta q_i)}{dt} dt &= [p_i \delta q_i]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \dot{p}_i \delta q_i dt \\
&= -\int_{t_i}^{t_f} \dot{p}_i \delta q_i dt \qquad (\because \delta q_i(t_i) = \delta q_i(t_f) = 0)
\end{aligned} \tag{128}
$$

を得る[*33]。これを (127) に戻して整理すれば

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i dt - \int_{t_i}^{t_f} \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt = 0 \tag{129}$$

となる。δp_i, δq_i は任意の仮想変位であるから結局、

[*32] (125) で微分と変分の交換 (56) を用いた。(126) では、作用が t に依らないことから $\frac{\partial H}{\partial t} \delta t$ を落としてある。

[*33] 第一項が落ちるのは (58) と同様の理由による。

$$\therefore \begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

となって、正準方程式 (4) が導かれる。

5.2　位相空間とリウビルの定理

5.2.1　位相空間

正準変数 (q, p) を軸にとって張った空間（q-p 空間）を**位相空間**という。系の自由度が f であるとき、正準変数はそれぞれ f 個ずつ存在するから、このときの位相空間は $2f$-次元の超空間となる。

位相空間上で時間 t はパラメータとしての役割を果たす。任意の時刻 t_0 における正準変数の値の組 $(q_i(t_0), p_i(t_0))$ は位相空間上で一つの運動状態を表す点であり、これを**代表点**という。代表点が時間によって変化することで描かれた軌跡、すなわちある運動状態の時間発展を表現したものは**トラジェクトリー**と呼ばれ、$2f$-次元の位相空間であれば $(2f-1)$-次元の超曲面となる。

位相空間では一つの運動状態の時間発展を一つのトラジェクトリーで追うことができる。代表点 (q_i, p_i) の時間微分 $(\dot{q}_i, \dot{p}_i)$ は、正準方程式より

$$(\dot{q}_i, \dot{p}_i) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{130}$$

となって、これは代表点の移動速度（トラジェクトリーの接線方向）を表す。つまり、ある代表点の時間発展は正準方程式によっていつでも一意に運命づけられるため、**トラジェクトリーが分岐したり交差することはない**。

5.2.2　リウビルの定理

位相空間で成り立つ重要な定理として、次に示す**リウビルの定理**がある。

リウビルの定理

位相空間上の任意の閉領域の体積 V は、時間発展に対し不変である。

$2f$-次元位相空間において、ある代表点を指定する正準変数は f-次元ベクトルの組 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ としてかける。ここで、時間微分をとったベクトル場 $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} \equiv (\dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{p}}) \tag{131}$$

は各代表点における移動速度の分布を表す。このとき、閉領域の体積の時間変化率 $\frac{dV}{dt}$ は、$\boldsymbol{v}$ の湧き出し・吸い込みとなるから

$$\frac{dV}{dt} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \tag{132}$$

と与えられる。正準方程式を代入して[*34]

[*34] 偏微分の順序交換（**シュワルツの定理**）が自明に成り立つとしている。

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}+\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}=0 \tag{133}$$

ゆえに時間発展に際し V が変化することはない。

5.3 正準変換

ラグランジュ方程式は座標変換に際して式形を変えないという性質を有していたことから、等価な方程式である正準方程式にも同様の性質があることが期待される。しかも正準方程式では正準変数 (q,p) が対等な立場にあるから、**座標のみならず運動量まで含めた変換を可能にする**。このような、正準変数の変数変換を**正準変換**という。

5.3.1 母関数による正準変換

いま、それぞれ f 個の正準変数 q,p の、新たな正準変数 Q,P への正準変換を考える。

$$\begin{aligned} Q_i=Q_i(q,p,t) &\ \leftrightarrow\ q_i=q_i(Q,P,t) \\ P_i=P_i(q,p,t) &\ \leftrightarrow\ p_i=p_i(Q,P,t) \end{aligned} \tag{134}$$

そして、これら新しい正準変数を陽に含む関数 $K=K(Q,P,t)$ を変換後のハミルトニアンとして定めるとき、次のような関係式が成り立っていたとする。

$$p_i\dot{q}_i-H=P_i\dot{Q}_i-K \tag{135}$$

(135) 左辺が作用を停留化するとき、右辺も同じように停留化条件となるから、このとき方程式

$$\begin{cases} \dot{Q}_i=\dfrac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i=-\dfrac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases} \tag{136}$$

を得る。したがって関係式 (135) が成り立てば、正準方程式は式形を乱さずに変数変換できることになる。

(135) はラグランジアンの変換を表す。ラグランジアンにおいては、座標を陽に含む任意関数の時間微分を加えても性質が変化しない" 任意性" があった。ここから、(135) は座標と運動量を陽に持つ任意関数 $W=W(q,p,Q,P,t)$ の時間微分を加えても成り立つことが予想できる[*35]。

正準変換の母関数

$$p_i\dot{q}_i-H=P_i\dot{Q}_i-K+\dot{W}(q,p,Q,P,t) \tag{137}$$

このような関数 W を正準変換の**母関数**といい、正準変換は母関数の関数形によって規定されることになる。ここで W の $4f$ 個の変数のうち独立変数は $2f$ 個である[*36]ことを考えると、新たな正準変数の組として

[*35] ハミルトン形式では座標と運動量が対等であるから、この場合の引数には運動量も含まれる。実際に作用の変分をとれば、(74) と同じように条件 $(\delta Q_i(t_i),\delta P_i(t_i))=(\delta Q_i(t_f),\delta P_i(t_f))=0$ によって δW の項は落ちる。

[*36] 正準変数 (q,p) は独立であり、正準変換をしても系の次元が変わることはない。この場合は $2f$-次元であり、ある f 個の変数の組を独立変数とみなせば残る $2f$ 個は従属変数として理解される。

$$(q,Q),(q,P),(p,Q),(p,P) \tag{138}$$

が考えられるが、これらは W を適当に定めることで変換が可能である。このときの W の関数形は以下の表のようになる。

独立変数	W の関数形
(q,Q)	$W=W_1(q,Q,t)$
(q,P)	$W=-P_iQ_i+W_2(q,P,t)$
(p,Q)	$W=p_iq_i+W_3(p,Q,t)$
(p,P)	$W=p_iq_i-P_iQ_i+W_4(p,P,t)$

このとき、関数 $W_i\quad(i=1,2,3,4)$ は正準変換を生み出す母関数となる。(137) と上の表を用いて W_i の全微分を求めると、以下の表のようになる。

母関数 W_i	全微分 dW_i
$W_1(q,Q,t)$	$dW_1=p_idq_i-P_idQ_i+(K-H)dt$
$W_2(q,P,t)$	$dW_2=p_idq_i+Q_idP_i+(K-H)dt$
$W_3(p,Q,t)$	$dW_3=-q_idp_i-P_idQ_i+(K-H)dt$
$W_4(p,P,t)$	$dW_4=-q_idp_i+Q_idP_i+(K-H)dt$

これをそれぞれの母関数の引数を見た全微分と比較してやれば、次の表で表される変換式を得る。

母関数による正準変換の規定式

母関数 W_i	変換式
$W_1(q,Q,t)$	$p_i=\dfrac{\partial W_1}{\partial q_i},\ P_i=-\dfrac{\partial W_1}{\partial Q_i},\ K=H+\dfrac{\partial W_1}{\partial t}$
$W_2(q,P,t)$	$p_i=\dfrac{\partial W_2}{\partial q_i},\ Q_i=\dfrac{\partial W_2}{\partial P_i},\ K=H+\dfrac{\partial W_2}{\partial t}$
$W_3(p,Q,t)$	$q_i=-\dfrac{\partial W_3}{\partial p_i},\ P_i=-\dfrac{\partial W_3}{\partial Q_i},\ K=H+\dfrac{\partial W_3}{\partial t}$
$W_4(p,P,t)$	$q_i=-\dfrac{\partial W_4}{\partial p_i},\ Q_i=\dfrac{\partial W_4}{\partial P_i},\ K=H+\dfrac{\partial W_4}{\partial t}$

(139)

(139) を見てみると、おのおの最初の 2 式は正準方程式によく似た形をしているが、すべて**ハミルトニアン H には依らず純粋に母関数のみによって規定されている。**

5.3.2　恒等変換・交換変換

(q, P) を独立変数にとったときの母関数 W_2 を、次のように定めてみる[*37]。

$$W_2(q, P) = q_i P_i \tag{140}$$

このとき W_2 が与える正準変換は、(139) より

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial W_2}{\partial q_i} = P_i \\ Q_i = \dfrac{\partial W_2}{\partial P_i} = q_i \\ K = H + \dfrac{\partial W_2}{\partial t} = H \end{cases} \tag{141}$$

となって、結局

恒等変換

$$(q_i, p_i) \to (q_i, p_i),\ H \to H \tag{142}$$

となる[*38]ことがわかる。これはハミルトニアンを不変に保ったまま座標を座標に、運動量を運動量に変換するから**恒等変換**である。

一方、座標を運動量に、運動量を座標に変換する**交換変換**:

交換変換

$$(q_i, p_i) \to (p_i, q_i),\ H \to H \tag{143}$$

も存在する。この場合の母関数は、

$$W_1 = q_i Q_i \tag{144}$$

とすればよい[*39]。

5.3.3　逆変換・合成変換と正準変換群

正準変換 $f : (q, p) \to (Q, P)$ と $g : (Q, P) \to (Q', P')$ に対し[*40]、

合成変換

$$g \circ f : (q, p) \to (Q', P') \tag{145}$$

のように、連続的に行った正準変換をまとめて一つの変換とすることを正準変換の**合成**といい、そのようにして得られた正準変換は**合成変換**とよばれる。また、$f : (q, p) \to (Q, P)$ に対して

---

*37 $W_3(p, Q) = p_i Q_i$ を用いてもよい。

*38 恒等変換は" 系を一切変換しない変換" であるから、このように表現してもよい。

*39 $W_4(p, P) = p_i P_i$ を用いてもよい。

*40 f, g は位相空間上の**写像**として理解できる。写像の作用を集合ではなく元によって表すときは $\mapsto$ を用いるのが望ましいが、ここでは用いない。

逆変換

$$f^{-1} : (Q, P) \to (q, p) \tag{146}$$

を**逆変換**といい、任意の正準変換について対応する逆変換が存在する。

ここから、全ての正準変換を含む集合を S とするとき、S は次のような代数系であるといえる（正準変換を $\forall f, g, h \in S$ とし、恒等変換を e、f の逆変換を f^{-1} とする)。

正準変換群

1. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$　（結合法則）
2. $f \circ e = e \circ f = f$　（恒等変換の存在）
3. $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$　（逆変換の存在）
4. いかなる合成変換も S の元である

(147)

これは**群**の公理に他ならない。

5.4 ポアソン括弧による定式化

q, p を陽に含む任意関数 $F(q, p), G(q, p)$ に対して、

ポアソン括弧

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{148}$$

で表される演算子 { , } を**ポアソン括弧**という。ポアソン括弧を用いてかいた正準方程式 (3) は

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\} \end{cases} \tag{149}$$

となって、符号まで含めて対称的な式形となる。

ポアソン括弧は保存量と深いかかわりがある。q, p に加え t を陽に持つ関数 $F(q, p, t)$ の時間微分を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \tag{150}$$

となるが、(150) 第二項・第三項をポアソン括弧でかけば

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{151}$$

を得る。ここから、次のことが言える。

時間に陽に依存しない関数と保存量

q, p の任意関数 F が t を陽に含まないとき、

$$\{F, H\} = 0 \iff F \text{ は保存量} \tag{152}$$

が成り立つ。

5.4.1 ポアソン括弧の性質

任意関数 $F(q,p), G(q,p), J(q,p)$ および $\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対し、ポアソン括弧は次の関係式をみたす。(証明略)

ポアソン括弧の性質

$$
\begin{aligned}
&1.\ \ \{F, G\} = -\{G, F\} \quad \text{(反対称性)} \\
&2.\ \ \begin{cases} \{aF + bG, J\} = a\{F, J\} + b\{G, J\} \\ \{F, aG + bJ\} = a\{F, G\} + b\{F, J\} \end{cases} \quad \text{(双線形性)} \\
&3.\ \ \begin{cases} \{FG, J\} = F\{G, J\} + \{F, G\}J \\ \{F, GJ\} = G\{F, J\} + \{F, G\}J \end{cases} \quad \text{(積の微分則)} \\
&4.\ \ \begin{cases} \{q_i, F\} = \dfrac{\partial F}{\partial p_i} \\ \{p_i, F\} = -\dfrac{\partial F}{\partial q_i} \end{cases} \quad \text{(正準変数のポアソン括弧)} \\
&5.\ \ \{F, \{G, J\}\} + \{G, \{J, F\}\} + \{J, \{F, G\}\} = 0 \quad \text{(ヤコビの恒等式)}
\end{aligned}
\tag{153}
$$

5.4.2 ポアソンの定理

ポアソン括弧による表現として、保存量の関係性を規定する**ポアソンの定理**がある。

ポアソンの定理

任意関数 $F(q,p,t), G(q,p,t)$ に対して、

$$F, G \text{ はともに保存量} \Rightarrow \{F, G\} \text{ は保存量} \tag{154}$$

が成り立つ。

次のように証明できる。F, G が t を陽に含まないときは、ヤコビの恒等式より

$$\{H, \{F, G\}\} + \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0 \tag{155}$$

である。F, G がともに保存量であるとき (152) より $\{F, H\} = \{G, H\} = 0$ であるから、(155) に代入して

$$\{H, \{F, G\}\} = -\{\{F, G\}, H\} = 0 \tag{156}$$

ゆえに $\{F,G\}$ は保存量である。次に F,G が t を陽に含むときは、(151) を $\{F,G\}$ について用いて

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{F,G\} &= \{\{F,G\},H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{F,G\} \\
&= -\{\{G,H\},F\} - \{\{H,F\},G\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\} \\
&= \left\{F, \{G,H\} + \frac{\partial G}{\partial t}\right\} + \left\{\{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} \\
&= \left\{F, \frac{dG}{dt}\right\} + \left\{\frac{dF}{dt}, G\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{157}
$$

を得る。結局、(154) が成り立つ。

5.4.3 基本括弧式

(148) から、次の三つの括弧式が直ちに従う[*41]。

基本括弧式

$$
\begin{cases}
\{q_i, q_j\} = 0 \\
\{p_i, p_j\} = 0 \\
\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}
\end{cases}
\tag{158}
$$

この三つの括弧式をとくに**基本括弧式**といい、正準変換を規定するうえで重要な役割を果たす。次のようである。

正準変換と基本括弧式

変数変換 $(q,p) \to (Q,P)$ が正準変換であるとは、変換後の変数 (Q,P) が変換前の変数 (q,p) で定義したポアソン括弧 $\{\ ,\ \}_{q,p}$ について基本括弧式:

$$
\begin{cases}
\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0 \\
\{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \\
\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}
\end{cases}
\tag{159}
$$

をみたすことである。

言い換えれば、**基本括弧式の値は正準変換について不変である**ともいえる。これは次のように証明される。

変換 (134) を考える。(q,Q) を独立変数に選んだときの (134) を

$$
\begin{aligned}
p_i &= \phi_i(q,Q,t) \\
P_i &= \psi_i(q,Q,t)
\end{aligned}
\tag{160}
$$

と表すとき、(139) より

[*41] δ_{ij} を**クロネッカーのデルタ**といい、添字 i,j について $i \neq j$ ならば 0 を、$i = j$ ならば 1 を返す量である。

$$
\begin{cases}
p_i = \dfrac{\partial W_1}{\partial q_i} \\
P_i = -\dfrac{\partial W_1}{\partial Q_i}
\end{cases} \tag{161}
$$

が成り立っているならば、母関数 $W_1(q, Q, t)$ が存在して (134) は正準変換となる。すなわち、必要十分条件[*42] として次の三式:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \phi_i}{\partial Q_j} = \dfrac{\partial}{\partial Q_j}\dfrac{\partial W_1}{\partial q_i} = \dfrac{\partial}{\partial q_i}\dfrac{\partial W_1}{\partial Q_j} = -\dfrac{\partial \psi_j}{\partial q_i} \\
\dfrac{\partial \phi_i}{\partial q_j} = \dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{\partial W_1}{\partial q_i} = \dfrac{\partial}{\partial q_i}\dfrac{\partial W_1}{\partial q_j} = \dfrac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \\
\dfrac{\partial \psi_i}{\partial Q_j} = -\dfrac{\partial}{\partial Q_j}\dfrac{\partial W_1}{\partial Q_i} = -\dfrac{\partial}{\partial Q_i}\dfrac{\partial W_1}{\partial Q_j} = \dfrac{\partial \psi_j}{\partial Q_i}
\end{cases} \tag{162}
$$

を得る[*43]。以下では (i, j) 成分が $\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$ であるような正方行列を (Q_q) と表記する。このとき、示すべき条件式は行列の成分の相等として

$$
(\phi_Q) = -(\psi_q)^\top,\ (\phi_q) = (\phi_q)^\top,\ (\psi_Q) = (\psi_Q)^\top \tag{163}
$$

と表せる[*44]（$\top$ は転置を表す)。また、基本括弧式 (159) は

$$
\begin{cases}
(Q_q)(Q_p)^\top - (Q_p)(Q_q)^\top = O \\
(P_q)(P_p)^\top - (P_p)(P_q)^\top = O \\
(Q_q)(P_p)^\top - (Q_p)(P_q)^\top = E
\end{cases} \tag{164}
$$

と表せる（O は零行列、E は単位行列[*45]）。また $p_i = \phi_i(q, Q(q, p), t),\ P_i = \psi_i(q, Q(q, p), t)$ に注意して (160) を変形すると、

$$
\begin{cases}
(P_p) = (\psi_Q)(Q_p) \\
(P_q) = (\psi_q) + (\psi_Q)(Q_q) \\
(\phi_Q)(Q_p) = E \\
(\phi_q) + (\psi_Q)(Q_q) = O
\end{cases} \tag{165}
$$

となる[*46]。(165) を用いて (164) を変形すると、まず (164) 第一式は

$$
\begin{aligned}
&(Q_q)(Q_p)^\top - (Q_p)(Q_q)^\top \\
&= -(\phi_Q)^{-1}(\phi_q)\left\{(\phi_Q)^{-1}\right\}^\top - (\phi_Q)^{-1} - \left\{(\phi_Q)^{-1}(\phi_q)\right\}^\top \\
&= -(\phi_Q)^{-1}\left\{(\phi_q) - (\phi_q)^\top\right\}\left\{(\phi_Q)^{-1}\right\}^\top \\
&= O
\end{aligned} \tag{166}
$$

[*42] (162 が成り立っているとき、母関数の全微分 dW_1 は完全微分となるから、確かに必要十分である。)
[*43] シュワルツの定理が自明に成り立つとしている。
[*44] ある行列の (i, j) 成分は対応する転置行列の (j, i) 成分となる。
[*45] 全ての成分がクロネッカーのデルタ δ_{ij} から構成される正方行列は単位行列である。
[*46] 第三式では $(P_p) = E$、第四式では $(p_q) = O$ の関係を用いている。

となる[*47]。続いて第二式は

$$
\begin{aligned}
&(P_q)(P_p)^\top - (P_p)(P_q)^\top \\
&= \{(\psi_q) + (\psi_Q)(Q_q)\}\{(\psi_Q)(Q_p)\}^\top - (\psi_Q)(Q_p)\{(\psi_q) + (\psi_Q)(Q_q)\}^\top \\
&= (\psi_q)(Q_p)^\top(\psi_Q)^\top + (\psi_Q)(Q_q)(Q_p)^\top(\psi_Q)^\top - (\psi_Q)(Q_p)(Q_q)^\top(\psi_Q)^\top - (\psi_Q)(Q_p)(\psi_q)^\top \\
&= (\psi_q)\left\{(\phi_Q)^{-1}\right\}^\top(\psi_Q)^\top - (\psi_Q)(\phi_Q)^{-1}(\psi_q)^\top \\
&= \left\{(\phi_Q)^{-1}(\psi_q)^\top\right\}^\top(\psi_Q)^\top - (\psi_Q)(\phi_Q)^{-1}(\psi_q)^\top \\
&= O
\end{aligned}
\tag{167}
$$

となる[*48]。第三式は

$$
\begin{aligned}
&(Q_q)(P_p)^\top - (Q_p)(P_q)^\top \\
&= (Q_q)(Q_p)^\top(\psi_Q)^\top - (Q_p)(Q_q)^\top(\psi_Q)^\top - (Q_p)(\psi_q)^\top \\
&= -(Q_p)(\psi_q)^\top \\
&= -(\phi_Q)^{-1}(\psi_q)^\top \\
&= E
\end{aligned}
\tag{168}
$$

となる[*49]。したがって、(166)(167)(168) から (164) が成り立つための条件として (163) を得る。また (163) が成り立つとき母関数が存在して正準変換となるから、基本括弧式 (159) が成り立つとき正準変換となる。逆の証明は、以上の議論から自明に成り立つ。

5.4.4 正準不変量

正準変換に際して変化しない量を**正準不変量**という。ポアソン括弧はその代表例である。

正準不変量としてのポアソン括弧

任意関数 $F(q,p), G(q,p)$ と正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$ に対して、ポアソン括弧は

$$
\{F, G\}_{q,p} = \{F, G\}_{Q,P} \tag{169}
$$

をみたす。すなわち、ポアソン括弧は正準不変量である。

よって、ポアソン括弧は正準変数を添字にとって区別する必要はない。この命題は次のように証明される。任意関数 $F(q,p)$ の正準変換は

$$
F(q,p) \to F(Q,P) = F(Q(q,p), P(q,p)) \tag{170}
$$

と表される。このときのポアソン括弧 $\{F, G\}_{q,p}$ は、偏微分の連鎖律を用いて

[*47] ヤコビアンが 0 でないから逆行列は存在する。また、二行目から三行目の変形で行列の積の転置（$(AB)^\top = B^\top A^\top$）を用いた。
[*48] 二行目から三行目の変形で第一式の結果を用いた。
[*49] 二行目から三行目で第一式の結果を用いた。

$$
\begin{aligned}
\{F,G\}_{q,p} &= \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \\
&= \frac{\partial F}{\partial q_i}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial G}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\right) \\
&= \frac{\partial G}{\partial Q_j}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial G}{\partial P_j}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial P_j}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\right) \\
&= \frac{\partial G}{\partial Q_j}\{F,Q_j\}_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial P_j}\{F,P_j\}_{q,p}
\end{aligned}
\tag{171}
$$

と計算できるが、(171) で $F=Q_i$ および $F=P_i$ としたとき[*50]

$$
\begin{aligned}
\{Q_i,G\} &= \frac{\partial G}{\partial Q_j}\{Q_i,Q_j\}_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial P_j}\{Q_i,P_j\}_{q,p} = \frac{\partial G}{\partial P_j}\delta_{ij} = \frac{\partial G}{\partial P_i} \\
\{P_i,G\} &= \frac{\partial G}{\partial Q_j}\{P_i,Q_j\}_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial P_j}\{P_i,P_j\}_{q,p} = -\frac{\partial G}{\partial Q_j}\delta_{ij} = -\frac{\partial G}{\partial Q_i}
\end{aligned}
\tag{172}
$$

(172) で $G\to F$ としたものを (171) に代入して[*51]

$$
\begin{aligned}
\{F,G\}_{q,p} &= -\frac{\partial G}{\partial Q_j}\{Q_j,F\}_{q,p} - \frac{\partial G}{\partial P_j}\{P_j,F\}_{q,p} \\
&= -\left(\frac{\partial G}{\partial Q_j}\frac{\partial F}{\partial P_j} - \frac{\partial G}{\partial P_j}\frac{\partial F}{\partial Q_j}\right) \\
&= -\{G,F\}_{Q,P} \\
&= \{F,G\}_{Q,P}
\end{aligned}
\tag{173}
$$

を得る。この命題によって、種々の正準変換をはじめ合成変換 (145) や逆変換 (146) は正準変換であることが保障される。

さて、(151) から、時間に陽に依存しない関数については

$$
\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}
\tag{174}
$$

であるから、ハミルトニアンとのポアソン括弧は時間微分と同じ役割を果たす演算子であることがわかる。またポアソン括弧が正準不変量であるという事実から、**時間発展は正準変換であり、正準不変量は時間発展に対して不変である**ことがいえる[*52]。これを利用すれば、リウビルの定理を位相空間体積が正準不変量であるということから証明できる。

$2f$-位相空間上の任意領域 Ω の体積を V とするとき、f-重積分を用いて

$$
V = \overbrace{\int\cdots\int_\Omega}^{f} \prod_i dq_i dp_i
\tag{175}
$$

[*50] 最後の変形で、$\delta_{ij} = \frac{\partial Q_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial P_j}{\partial P_i}$ および偏微分の連鎖律を用いている。

[*51] 添字を $i\to j$ としていることに注意。

[*52] 実際に位相空間上で、ある時刻 t_i で (q,p) の値をとる代表点が時刻 t_f で (Q,P) に移動したとすると、$(q,p)\to(Q,P)$ という正準変換は同じ状態を再現する。

と表すことができる[53]。正準変換 $(q,p)\to(Q,P)$ を考えると、

$$\int\cdots\int_\Omega \prod_i dq_i dp_i = \int\cdots\int_\Omega |\det J(Q,P)| \prod_i dQ_i dP_i \tag{176}$$

となる。ここで $\det J(Q,P)$ は**ヤコビアン**である。(176) から、正準変換の前と後で V が不変であるためには

$$|\det J(Q,P)| = 1 \tag{177}$$

でなければならない。

いま、$2f$ 個の正準変数 $q_1,\cdots,q_f,p_1,\cdots,p_f$ および $Q_1,\cdots,Q_f,P_1,\cdots,P_f$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} &a_1,\cdots,a_f,\cdots,a_{2f} \\ &A_1,\cdots,A_f,\cdots,A_{2f} \end{aligned} \tag{178}$$

と一つの文字で表現する。このとき

$$\begin{aligned} (a_i) &\equiv (a_1,a_2,\cdots,a_{2f}) \qquad (i=1,2,\cdots,2f) \\ (A_j) &\equiv (A_1,A_2,\cdots,A_{2f}) \qquad (j=1,2,\cdots,2f) \end{aligned} \tag{179}$$

とすると、変換前の正準方程式は行列の積として

$$(\dot a_i) = U\left(\frac{\partial H}{\partial a_i}\right) \tag{180}$$

と表現でき、変換後の正準方程式も、変換後のハミルトニアンを $K=K(Q,P)=K(A)$ とすると同様に

$$(\dot A_j) = U\left(\frac{\partial K}{\partial A_j}\right) \tag{181}$$

と表現できる。ここで

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial a_i}\right) &\equiv \left(\frac{\partial H}{\partial a_1},\frac{\partial H}{\partial a_2},\cdots,\frac{\partial H}{\partial a_{2f}}\right) \\ \left(\frac{\partial K}{\partial A_j}\right) &\equiv \left(\frac{\partial K}{\partial A_1},\frac{\partial K}{\partial A_2},\cdots,\frac{\partial K}{\partial A_{2f}}\right) \end{aligned} \tag{182}$$

であり、U は、f 次単位行列 E および零行列 O を用いて

$$U \equiv \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} \tag{183}$$

と表される直交行列[54]である。一方ヤコビ行列は、(i,j) 成分が $\frac{\partial a_i}{\partial A_j}$ であるような行列として

$$J = \left(\frac{\partial a_i}{\partial A_j}\right) \tag{184}$$

[53] ここで用いた $\prod_i$ を**総乗演算子**といい、この場合添字 i について積をとる。

[54] 明らかに $U^{-1}=U^\top$, $\det U = 1$ をみたす。

とかける。また $J^{-1}J = JJ^{-1} = E$ [*55]となるような逆行列 J^{-1} が存在して[*56]、

$$J^{-1} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial a_j}\right) \tag{185}$$

である。よって (180) を用いて

$$(\dot{a}_i) = \left(\frac{\partial a_i}{\partial A_j}\right)(\dot{A}_j) = J(\dot{A}_j) = JU\left(\frac{\partial K}{\partial A_j}\right) \tag{186}$$

を得る。また、

$$\left(\frac{\partial K}{\partial A_j}\right) = \left(\frac{\partial a_j}{\partial A_i}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial a_i}\right) = J^{\top}\left(\frac{\partial H}{\partial a_i}\right) \tag{187}$$

である[*57]から、(186) に代入して

$$(\dot{a}_i) = JUJ^{\top}\left(\frac{\partial H}{\partial a_i}\right) \tag{188}$$

を得る。(188) を (179) と比較すれば、

$$\therefore JUJ^{\top} = U \tag{189}$$

となるから、(189) の行列式は

$$\det(JUJ^{\top}) = (\det J)^2 = 1 \ \Rightarrow\ |\det J| = 1 \tag{190}$$

と計算される[*58]。ヤコビアンが 1 であることから、(176) に代入して

$$\int\cdots\int_{\Omega}\prod_i dq_i dp_i = \int\cdots\int_{\Omega}\prod_i dQ_i dP_i \tag{191}$$

ゆえに位相空間体積 V は正準不変量であり、時間発展に対して変化しない。

リウビルの定理（別表現）

位相空間上の任意の領域 Ω の体積 V は、正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$ に対し

$$V = \int\cdots\int_{\Omega}\prod_i dq_i dp_i = \int\cdots\int_{\Omega}\prod_i dQ_i dP_i$$

をみたす正準不変量である。

正準不変量として重要なものはもう一つある。正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$ の母関数 $W_1(q,Q)$ の全微分は

$$dW_1 = p_i dq_i - P_i dQ_i \tag{192}$$

[*55] このときの E は $2f$ 次正方行列である。

[*56] 正準変換が成り立つとしているからヤコビアンは 0 でなく、このとき J^{-1} が存在することは同値である。

[*57] 行列の積が（行 × 列）で定義されるため、転置を取らなければならない。

[*58] 行列式の性質（$\det(AB) = \det A \det B$, $\det A = \det A^{\top}$ を用いている。）

であるが、両辺を任意の閉曲線経路に沿って周回積分すると

$$\oint dW_1 = \oint (p_i dq_i - P_i dQ_i) \tag{193}$$

である。ここで母関数 W_1 は (139) をみたし完全微分であるから

$$\oint dW_1 = 0 \tag{194}$$

である。結局、

$$\therefore \oint p_i dq_i = \oint P_i dQ_i \tag{195}$$

となって、$\oint p_i dq_i$ は保存する。これは作用 (123) 第一項を

$$\int_{t_i}^{t_f} p_i \dot{q}_i dt = \int_{q_i}^{q_f} p_i dq_i \tag{196}$$

と変数変換したときの式であり、**作用変数**という。

作用変数

正準変換 $(q, p) \to (Q, P)$ に対して作用変数は不変であり、

$$\oint p_i dq_i = \oint P_i dQ_i$$

をみたす。

5.5 無限小変換と保存量

正準変換のうち、恒等変換 (142) から無限小にずれた次の変換:

無限小変換

$$(q_i, p_i) \to (q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i),\ H \to K \tag{197}$$

は**無限小変換**とよばれる（K は変換後のハミルトニアン）。この正準変換は恒等変換の母関数 (140) を離形にした次の形:

$$W_2(q, P) = q_i P_i + \epsilon G(q, P) \tag{198}$$

で与えられると予想できる（ϵ は微小量）。変換式は、(139) を用いれば

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial W_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \dfrac{\partial G(q, P)}{\partial q_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial W_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \dfrac{\partial G(q, P)}{\partial P_i} \end{cases} \tag{199}$$

となる。G の引数 P を変換前の変数 p で置き換えて整理すると、

$$\begin{cases} P_i = p_i - \epsilon \dfrac{\partial G(q,p)}{\partial q_i} + O(\epsilon^2) \\ Q_i = q_i + \epsilon \dfrac{\partial G(q,p)}{\partial p_i} + O(\epsilon^2) \end{cases} \tag{200}$$

を得る[*59]。(200) を (143) と比較すれば、ポアソン括弧を用いて

無限小変換の変換式

$$\begin{cases} \delta q_i = \epsilon \dfrac{\partial G}{\partial p_i} = \epsilon \{q_i, G\} \\ \delta p_i = -\epsilon \dfrac{\partial G}{\partial q_i} = \epsilon \{p_i, G\} \end{cases} \tag{201}$$

と表せる。すなわち、関数 $G(q,p)$ は無限小変換 (197) の母関数となる。

無限小変換 (197) はネーターの定理と深いかかわりがある。(197) について、ハミルトニアン $H(q,p)$ の変分を考えると

$$\begin{aligned} \delta H &= K(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i) - H(q,p) \\ &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \\ &= \epsilon \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \\ &= \epsilon \{H, G\} \end{aligned} \tag{202}$$

とポアソン括弧を用いて表せる。ここで (152) を用いれば、次の条件が得られる。

$$\delta H = 0 \ \Leftrightarrow \ \{G, H\} = 0 \ \Leftrightarrow \ G\text{は保存量} \tag{203}$$

すなわち**無限小変換においてハミルトニアンが変化しないとき、母関数は保存量となる**。これはネーターの定理のハミルトン形式による表現である。

ネーターの定理（別表現）

母関数 $G(q,p)$ による無限小変換の前後でハミルトニアンが変化しないとき、G は保存量である。

5.6 ハミルトン・ヤコビ方程式

[*59] 記号 O は**ランダウのオミクロン**とよばれ、残余項（この場合 ϵ の多項式）を表す。O の引数は残余項のうち最も支配的な項を示す。すなわち $O(\epsilon^2)$ は微小量 ϵ の二次以上の多項式であり、十分無視できる。

6　量子力学の理論

7 補遺

7.1 アインシュタインの縮約規約

解析力学では" 系の自由度分だけ足し合わせる" という操作がよくでてくるが、式を簡潔に表記するために総和記号 $\sum$ を省略した記法がしばしばみられる。これをアインシュタインの**縮約規約**といい、次のようなルールである:

縮約規約

同じ添字が 2 回出てきた項には、総和をとる。

ここで添字とは、

$$\sum_{i=1}^{f} a_i \quad \left(\text{足し上げ範囲が自明な場合、}\sum_i a_i\text{とも}\right) \tag{204}$$

での i のように、$\sum$ の（見かけ上の）変数となる記号[*60]である。本書では添字に i, j, k などをよく用いる。縮約規約が適用できる式の例を以下に示す。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_i \overbrace{a_i b_i}^{\text{縮約}} \equiv a_i b_i \quad \text{（ベクトルの内積）} \tag{205}$$

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}}^{\text{縮約}} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} \quad \text{（}n\text{ 変数関数の微分の連鎖律）} \tag{206}$$

$$df = \sum_i \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i}^{\text{縮約}} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i \quad \text{（}n\text{ 変数関数の全微分）} \tag{207}$$

$$\sum_j \overbrace{\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{b}_j}^{\text{縮約}} \equiv \boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{b}_j \quad \text{（ベクトルの外積）} \tag{208}$$

同じ添字が 3 回以上でてきた項には、縮約規約は適用できない。以下のような場合である。

$$\sum_i {x_i}^2 y_i = \sum_i \overbrace{x_i x_i y_i}^{\text{縮約できない}} \tag{209}$$

また、積分 $\int$ と総和 $\sum$ の入れ替えが暗に行われることについても注意されたい。

[*60] このような添字を**ダミー・インデックス**という。

8 問題

Q1. ラグランジュ方程式 (1)

x-y 平面上の点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) に、それぞれ質量 m_1, m_2 をもつ二つの質点があるとする。この系のポテンシャルエネルギー V が、二点間の距離に比例するとした次の式:

$$V = k\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (k\text{は比例定数})$$

で与えられるとき、ラグランジュ方程式を構成して重心座標での加速度の大きさが 0 であることを示せ。

Q2. ラグランジュ方程式 (2)

9　問題の解答

Q1 の解答

系のラグランジアン L は

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1 + \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2 + \dot{y}_2)^2 - k\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

で与えられるから、ラグランジュ方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

の四つの方程式としてかける。これをそれぞれの成分についてかくと、

$$\begin{cases} -k\dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} - m_1\ddot{x}_1 = 0 \\ k\dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} - m_2\ddot{x}_2 = 0 \\ -k\dfrac{y_1 - y_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} - m_1\ddot{y}_1 = 0 \\ k\dfrac{y_1 - y_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} - m_2\ddot{y}_2 = 0 \end{cases}$$

となる。したがって上式から

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 = 0$$

$\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i) \quad (i = 1, 2)$ とおくと、

$$m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{0}$$

より、重心での加速度の大きさは 0 である。